2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

[非教育部考试中心官方标准试题，仅供参考]

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果函数 $f(x,y)$ 在（0，0）处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx(k=1,2,3)$ 则有（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_2<I_1$　(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_2<I_1<I_3$

(5)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=($\alpha_1$, α_2, α_3)，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$. 则 $Q^{-1}AQ$=(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{x<y\}$=(　　)

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（　　）

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) -1

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)$=________.

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$________

（11）$grad\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$________

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$_____.

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-XX^{T}$ 的秩为________.

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\overline{C})=$________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上.

（15）（本题满分 10 分）

证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

（18）(本题满分 10 分)

已知曲线 L：$\begin{cases}x=f(t)\\y=\cos t\end{cases}$（$0\leq t<\frac{\pi}{2}$），其中函数 $f(t)$具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0(0<t<\frac{\pi}{2})$，若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点距离值恒为 1，求函数 $f(t)$的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴无边界的区域的面积.

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点(2,0),再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点（0，2）的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$

（20）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（1）计算行列式|A|;

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

（21）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})x$ 的秩为 2，

（1） 求实数 a 的值；

（2） 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型.

（22）（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 X、Y 的概率分布为

	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\operatorname{cov}(X-Y,Y)$.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$。设 $Z=X-Y$.

（1）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（2）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_N$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$.

（3）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.