2004 年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$___.

【答】1, $\quad -4$

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$. 极限化为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5,$$

得 $b=-4$.因此，$a=1$，$b=-4$.

(2) 设函数 $f(u,v)$由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$确定，其中函数 $g(y)$可微，且 $g(y)\neq0$，

则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$_____.

【答】 $-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$

【详解】令 $u=xg(y)$，$v=y$，则 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，

所以，$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac12\le x<\dfrac12\\ -1, & x\ge\dfrac12\end{cases}$，则 $\int_{\frac12}^{2}f(x-1)dx=$___.

【答】 $-\dfrac12$

【详解】令 $x-1=t$，$\int_{\frac12}^{2}f(x-1)dx=\int_{-\frac12}^{1}f(t)dt=\int_{-\frac12}^{1}f(x)dx$

$$=\int_{-\frac12}^{\frac12}xe^{x^2}dx+\int_{\frac12}^{1}(-1)dx=0+(-\frac12)=-\frac12.$$

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为___.

【答】2

【详解 1】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

于是二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$,

由初等变换得 $A\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$,

从而 $r(A)=2$, 即二次型的秩为 2.

【详解 2】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$\begin{aligned}&=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3\\&=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2\\&=2y_1^{\ 2}+\frac{3}{2}y_2^{\ 2},\end{aligned}$$

其中 $y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\qquad y_2=x_2-x_3$.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$________.

【答】 $\frac{1}{e}$

【详解】 由于 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$, X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

故

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\frac{1}{\lambda}\}=1-F(\frac{1}{\lambda})=\frac{1}{e}.$$

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$,

$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_.$$

【答】 σ^2

【详解】 因为 $E[\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2]=\sigma^2$, $E[\frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2]=\sigma^2$,

故应填 σ^2.

二、选择题

(7) 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.

【 】

【答】[A]

【详解】当 $x\neq 0, 1, 2$ 时，$f(x)$连续，而

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2}f(x)=\infty,$$

所以，函数$f(x)$在$(-1, 0)$内有界，故选(A).

(8) 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有定义，且 $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}，则$$

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点. (B) $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点.

(D) $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

【 】

【答】 (D)

【详解】 因为 $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f(\frac{1}{x})=\lim_{u\to\infty}f(u)=a$(令$u=\frac{1}{x}$)，又 $g(0)=0$，所以，

当 $a=0$ 时，$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$，即 $g(x)$在点 $x=0$ 处连续，当 $a\neq 0$ 时，

$\lim_{x\to 0}g(x)\neq g(0)$，即 $x=0$ 是 $g(x)$的第一类间断点，因此，$g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性

与 a 的取值有关，故选(D).

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0, 0)$不是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0, 0)$也不是曲线 $y = f(x)$的拐点.

【 】

【答】C）

【详解】设 $0 < \delta < 1$，当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$时，$f(x) > 0$，而 $f(0) = 0$，所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

显然，$x = 0$ 是 $f(x)$的不可导点. 当 $x \in (-\delta, 0)$时，$f(x) = -x(1-x)$， $f''(x) = 2 > 0$，

当 $x \in (0, \delta)$时，$f(x) = x(1-x)$， $f''(x) = -2 < 0$，所以$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

故选(C).

(10) 设有下列命题：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛.

(3) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) (1) (2).　　　(B) (2) (3).　　　(C) (3) (4).　　　(D) (1) (4).

【 】

【答】 （D）

【详解】 (1)是错误的，如令 $u_n = (-1)^n$，显然，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 分散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(2)是正确的，因为改变、增加或减少级数的有限项，不改变级数的收敛性.

(3)是正确的，因为由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ 可得到 u_n 不趋向于零($n \to \infty$)，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(4)是错误的，如令 $u_n = \frac{1}{n}, v_n = -\frac{1}{n}$，显然，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，而

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛．故选(B).

(11) 设$f'(x)$在[a , b]上连续，且$f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$.

【 】

【答】(D)

【详解】首先，由已知$f'(x)$在[a , b]上连续，且$f'(a)>0, f'(b)<0$，则由介值定理，

至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$；

另外，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，至少存在一点$x_0\in(a,b)$

使得$\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$，即$f(x_0)>f(a)$．同理，至少存在一点$x_0\in(a,b)$

使得$f(x_0)>f(b)$．所以，(A) (B) (C)都正确，故选(D).

(12) 设n阶矩阵A与B等价，则必有

(A) 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=a$．　(B) 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=-a$．

(C) 当$|A|\neq 0$时，$|B|=0$．　(D) 当$|A|=0$时，$|B|=0$．

【 】

【答】 (D)

【详解】因为当$|A|=0$时，$r(A)<n$，又 A与B等价，故$r(B)<n$， 即$|B|=0$，故选(D).

(13) 设n阶矩阵A的伴随矩阵$A^*\neq 0$，若ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4是非齐次线性方程组 $Ax=b$的

互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系

(A) 不存在.　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　(D) 含有三个线性无关的解向量.

【 】

【答】 (B)

【详解】 因为基础解系含向量的个数=$n-r(A)$，而且

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$$

根据已知条件 $A^* \neq 0$，于是 $r(A)$ 等于 n 或 $n-1$．又 $Ax=b$ 有互不相等的解,

即解不惟一，故 $r(A)=n-1$．从而基础解系仅含一个解向量，即选(B).

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha \in (0,1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，

若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$．　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$．　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$．　(D) $u_{1-\alpha}$．

【 】

【答】 (C)

【详解】 由 $P\{|X|<x\}=\alpha$，以及标准正态分布密度曲线的对称性可得

$P\{X>x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$．故正确答案为(C).

三、解答题

(15) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}$$

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的

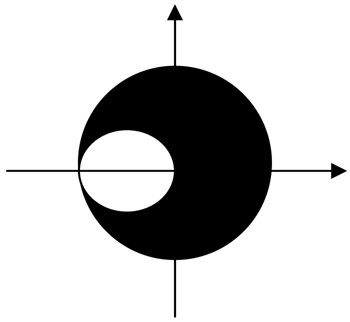
平面区域(如图).

【详解】令 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}, D_2=\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\le 1\}$，

由对称性，$\iint\limits_D y d\sigma=0$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma - \iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr .$$



$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9} = \frac{16}{9}(3\pi - 2)$$

所以，$\iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2)$.

(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x)$, $g(x)$在$[a , b]$上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt ,\ x \in [a , b),\ \int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt .$$

证明：$\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

【详解】 令 $F(x) = f(x) - g(x)$，$G(x) = \int_a^x F(t)dt$，

由题设 $G(x) \ge 0$，$x \in [a , b]$，

$$G(a) = G(b) = 0,\ G'(x) = F(x) .$$

从而

$$\int_a^b xF(x)dx = \int_a^b xdG(x) = xG(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)dx = -\int_a^b G(x)dx ,$$

由于 $G(x) \ge 0$，$x \in [a , b]$，故有

$$-\int_a^b G(x)dx \le 0 ,$$

即 $\int_a^b xF(x)dx \le 0$.

因此 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 Q = 100 – 5P，其中价格 P ∈ (0 , 20)，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$)；

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益)，并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

【详解】 (I) $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right| = \frac{P}{20-P}$.

(II) 由 R = PQ，得

$$\frac{dR}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}=Q(1+\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP})=Q(1-E_d).$$

又由 $E_d=\frac{P}{20-P}=1$，得 P = 10.

当 10 < P < 20 时，$E_d>1$，于是 $\frac{dR}{dP}<0$，

故当 10 < P < 20 时，降低价格反而使收益增加.

(19) (本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

(I) $S(x)$所满足的一阶微分方程；

(II) $S(x)$的表达式.

【详解】(I) $S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$，

易见 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

$$=x(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)=x[\frac{x^2}{2}+S(x)].$$

因此 $S(x)$是初值问题

$$y'=xy+\frac{x^3}{2},\ y(0)=0 \text{ 的解.}$$

(II) 方程 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$ 的通解为

$$y=e^{\int xdx}[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int xdx}dx+C]$$

$$=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件 y(0) = 0，得 C = 1.

故 $y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数 $S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$.

(20)(本题满分 13 分)

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，

试讨论当 a,b 为何值时,

(Ⅰ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

(Ⅱ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

【详解】 设有数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta. \qquad (*)$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 对矩阵 (A,β) 施以初等行变换, 有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & a+2 & -b-2 & 3\\ 0 & -3a & a+2b & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{bmatrix}.$$

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时, 有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -b & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$. 故方程组(*)无解, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a\neq 0$, 且 $a\neq b$ 时, 有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r(A,\beta)=3$, 方程组(*)有唯一解：

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a},\quad k_3=0.$$

此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示, 其表示式为

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2 .$$

(III) 当 $a=b\neq 0$ 时，对矩阵 (A,β) 施以初等行变换，有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a}\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$r(A)=r(A,\beta)=2$， 方程组(*)有无穷多解， 其全部解为

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a}+c,\quad k_3=c, \quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数}.$$

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一， 其表示式为

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+(\frac{1}{a}+c)\alpha_2+c\alpha_3 .$$

(21) (本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【详解】 (Ⅰ) 1° 当 $b\neq 0$ 时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} (n-1)b & -b & \cdots & -b \\ -b & (n-1)b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & (n-1)b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & (n-1) & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & (n-1) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & n & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

解得 $\xi_1 = (1,1,1,\cdots,1)^T$，所以 A 的属于 λ_1 的全部特征向量为

$$k\xi_1 = k(1,1,1,\cdots,1)^T \qquad (k\text{ 为任意不为零的常数}).$$

对 $\lambda_2 = 1-b$，

$$\lambda_2 = E - A = \begin{pmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\xi_2 = (1,-1,0,\cdots,0)^T,\ \xi_3 = (1,0,-1,\cdots,0)^T,\ \cdots,\xi_n = (1,0,0,\cdots,-1)^T.$$

故 A 的属于 λ_2 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \cdots + k_n\xi_n \qquad (k_2,k_3,\cdots,k_n\text{ 是不全为零的常数}).$$

2° 当 $b=0$ 时，

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^n,$$

特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$，任意非零列向量均为特征向量.

(Ⅱ) 1° 当 $b \neq 0$ 时，A 有 n 个线性无关的特征向量，令 $P = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}$$

2°　当 $b=0$ 时，$A=E$，对任意可逆矩阵 P，均有 $P^{-1}AP=E$.

(22) (本题满分 13 分)

设 A，B 为两个随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

【详解】　(Ⅰ) 因为 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{12}$，　于是　$P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\dfrac{1}{6}$，

则有　$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\dfrac{2}{3}$，

(或　$P\{X=0,Y=0\}=1-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}$)，

即 (X,Y) 的概率分布为：

X \ Y	0	1
0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{12}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$

(Ⅱ)　方法一：

因为 $EX = P(A) = \frac{1}{4}$，$EY = P(B) = \frac{1}{6}$，$E(XY) = \frac{1}{12}$，

$EX^2 = P(A) = \frac{1}{4}$，$EY^2 = P(B) = \frac{1}{6}$，

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}$，$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{16}$，

$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{24}$，

所以 X 与 Y 的相关系数 】

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

方法二：

X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $EX = \frac{1}{4}, EY = \frac{1}{6}$，$DX = \frac{3}{16}$，DY=$\frac{5}{36}$, E(XY)=$\frac{1}{12}$,

故 $Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(III) Z 的可能取值为：0，1，2 .

$P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{2}{3}$，

$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{4}$，

$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{12}$，

即 Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x > \alpha, \\ 0, & x \le \alpha, \end{cases}$$

其中参数$\alpha>0,\beta>1$. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本,

(Ⅰ) 当$\alpha=1$时, 求未知参数β的矩估计量;

(Ⅱ) 当$\alpha=1$时, 求未知参数β的最大似然估计量;

(Ⅲ) 当$\beta=2$时, 求未知参数α的最大似然估计量.

【详解】 当$\alpha=1$时, X的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

(Ⅰ) 由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$, 解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$,

所以, 参数β的矩估计量为 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(Ⅱ) 对于总体X的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$时, $L(\beta)>0$, 取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

对β求导数，得

$$\frac{d[\ln L(\beta)]}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

令 $\dfrac{d[\ln L(\beta)]}{d\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$, 解得 $\beta=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

于是β的最大似然估计量为

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

(III) 当 $\beta = 2$ 时，X 的概率密度为

$$f(x,\beta) = \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{x^3}, & x > \alpha, \\ 0, & x \le \alpha, \end{cases}$$

对于总体 X 的样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，似然函数为

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha) = \begin{cases} \frac{2^n \alpha^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3}, & x_i > \alpha (i = 1,2,\cdots,n), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x_i > \alpha (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，α 越大，$L(\alpha)$ 越大，即 α 的最大似然估计值为

$$\hat{\alpha} = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

于是 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$