2000年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

（1） 设$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中$f,g$均可微，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

【答】 $yf_1'+\dfrac{1}{x}f_2'-\dfrac{y}{x^2}g'$.

【详解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=yf_1'+\dfrac{1}{x}f_2'-\dfrac{y}{x^2}g'$.

（2） 设$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{e^x+e^{2-x}}=$__________

【答】 $\dfrac{\pi}{4e}$.

【详解】 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_1^{+\infty}\dfrac{e^xdx}{e^x+\left(e^x\right)^2}\overset{e^x=t}{=\!=\!=}\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{e^2+t^2}=\dfrac{1}{e}\arctan\dfrac{t}{e}\Bigg|_0^{+\infty}$

$$=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e}$$

（3）已知四阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似；矩阵为$\boldsymbol{A}$的特征值$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$，则行列式$\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|=$______.

【答】 24

【详解】因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，而相似矩阵有相同的特征值，所以$\boldsymbol{B}$得四个特征值$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$，又由$\boldsymbol{Bx}=\lambda_i\boldsymbol{x},\lambda_i\neq 0$，有$\left(\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right)x=\left(\dfrac{1}{\lambda_i}-1\right)x$，可见矩阵$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$有特征值$\dfrac{1}{\lambda_i}-1$，即1，2，3，4.从而有行列式$\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}\right|$=1×2×3×4＝24

（3） 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \dfrac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & 其他\end{cases}$$
若k使得$P\{X\geq k\}=\dfrac{2}{3}$，则$k$的取值范围是________

【答】 $[1,3]$

【详解】 由题设 $P\{X \geq k\}=\frac{2}{3}$,知道

$P\{X<k\}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,而 $P\{X<k\}=\int_{-\infty}^{k} f(x) dx.$

再对照概率密度函数的定义，可见上式成立的充要条件是 $1 \leq k \leq 3$. 此时

$P\{X<k\}=\int_{0}^{1} \frac{1}{3} dx=\frac{1}{3}.$

（5）假设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y=\begin{cases}1 & 若 x>0 \\ 0 & 若 \mathrm{X}=0 \\ -1 & 若 x<0\end{cases}$，则方差 $DY=$________________.

【答】 $\frac{8}{9}$

【详解】因为 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，所以其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

于是 $\mathrm{P}\{\mathrm{Y}=-1\}=P\{X<0\}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}\{\mathrm{Y}=0\}=P\{X=0\}=0$

$\mathrm{P}\{\mathrm{Y}=1\}=P\{X>0\}=\frac{2}{3}$

因此

$$E(Y)=-1 \times \frac{1}{3}+0 \times 0+1 \times \frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$E(Y^{2})=(-1)^{2} \times \frac{1}{3}+0^{2} \times 0+1^{2} \times \frac{2}{3}=1$$

故 $D(Y)=E(Y^{2})-[E(Y)]^{2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

二、 选择题

（1）设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \to \infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim_{x \to \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零 (B)存在但不一定为零

(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

【 】

【答】 [D]

【详解】 若令 $\varphi(x)=1-e^{-|x|}, g(x)=1+e^{-|x|}, f(x)=1$ ，则有

$\varphi(x) \le f(x) \le g(x),$

且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

可排除（A）（C）两个选项.

又如

$\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}, g(x)=e^{-|x|}+e^x, f(x)=e^x$

显然$\varphi(x), g(x), f(x)$满足题设条件，但$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$不存在。

因此（B）也可排除，剩下（D）为正确选项.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数$|f(x)|$在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是

(A) $f(a)=0且f'(a)=0$ (B) $f(a)=0且f'(a)\ne 0$

(C) $f(a)>0且f'(a)>0$ (D) $f(a)<0且f'(a)<0$

【 】

【答】 （B）

【详解】 举反例进行说明：如

$f(x)=x^2$ 在点 $x=0$ 处，$f(0)=0, f'(0)=0$，并不能推倒出$|f(x)|=x^2$在点 $x=0$处不可导，排除（A）

$f(x)=x^2$在点 $x=1$处，$f(1)>0$，$f'(1)>0$，但$|f(x)|=x^2$在点 $x=1$处可导，排除（C）；

同样，$f(x)=-x^2$在点 $x=1$处，$f(1)<0$，$f'(1)<0$,但 $|f(x)|=x^2$,在点 $x=1$处可导,排除(D).

剩下(B)为正确选项.事实上,当(B)成立,即 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\ne 0$时,有

$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|.$$

可见当 $f'(a)\ne 0$时, $|f(x)|$在点 $x=a$ 处的左、右导数不相等,因此导数不存在.

故 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\ne 0$是$|f(x)|$在点 $x=a$ 处不可导的充分条件.

(3) 设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是四元非齐次线形方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且秩

(**A**)=3, $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,4)^T, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=(0,1,2,3)^T$,c 表示任意常数，则线形方程组

$AX=b$ 得通解 $X=$

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

【 】

【答】 (C)

【详解】. 由题设,r (A)=3, 可见对应齐次线性方程组的基础解系所包含的解向量的个数为 4-3=1,即其任一非零解均可作为基础解系.

又根据解的性质知

$$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=(2,3,4,5)^T\neq 0$$

为对应齐次线性方程组的解,即可作为基础解系,从而线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=b$ 的通解为

$$x=\boldsymbol{\alpha}_1+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

故正确选项为(C)

(4) 设 A 为 n 阶实矩阵,A^T 是 A 的转置矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ):$\boldsymbol{Ax}=0$ 和(Ⅱ)

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$,必有

(A)(Ⅱ)的解都是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)解也是(Ⅱ)的.

(B)(Ⅱ)的解都是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)解不是(Ⅱ)的.

(C)(Ⅰ)解不是(Ⅱ)的,(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)解是(Ⅱ)的,但Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

【 】

【答】 (A)

【详解】 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解,则显然 $\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$,即(Ⅰ)解是(Ⅱ)的;反过来,

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=0$ 的解,即 $\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{Ax}=0$,则有

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\left(\boldsymbol{Ax}\right)^T\left(\boldsymbol{Ax}\right)=0,$

从而可以推出 $\boldsymbol{Ax}=0$.

因为若设 $\boldsymbol{Ax}=\left(a_1,a_2,\cdots a_n\right)^T$,则 $\left(\boldsymbol{Ax}\right)^T\left(\boldsymbol{Ax}\right)=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0,$

于是有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0,$

即 $\boldsymbol{Ax}=0$，说明（II）的解也是（I）的解.故正确选项为(A)

（5）在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“ 电炉断电 ”，设 $T_{(1)}\le T_{(2)}\le T_{(3)}\le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件

(A) $\{T_{(1)}\ge t_0\}$.　　(B) $\{T_{(2)}\ge t_0\}$.

(C) $\{T_{(3)}\ge t_0\}$.　　(D) $\{T_{(4)}\ge t_0\}$.

【 】

【答】(C)

【详解】. “ 电炉断电 ” 这一事件 E 发生,意味着四个温控器至少有两个显示的温度值大于或等于 t_0,即若将 4 个温控器上的值 $T_{(1)},T_{(2)},T_{(3)},T_{(4)}$ 从小到大排列的话,排在第 3 的温度值一定大于或等于 t_0,即有 $\{T_{(3)}\ge t_0\}$,故正确为(C).

三、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的解.

【详解】 对应齐次方程 $y''-2y'=0$ 的特征方程为

$\lambda^2-2\lambda=0.$

其特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$ 对应的齐次方程的解为 $\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}$.

由于 $a=\lambda_2=2$ 为单根，因此可设非齐次方程的特解为 $y^*=Axe^{2x}$.

将 $\left(y^*\right)'=\left(A+2Ax\right)e^{2x},\left(y^*\right)''=4A\left(1+x\right)e^{2x}$.

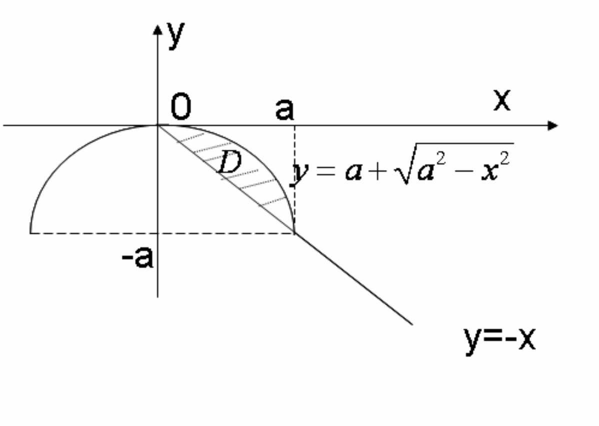
将 $y(0)=0,y'(0)=1$ 代入通解，求得 $C_1=\dfrac{3}{4},C_2=\dfrac{1}{4}$.从而所求满足初始条件的特解为

$y=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}e^{2x}+\dfrac{1}{2}xe^{2x}.$

四、(本题满分 6 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ (a<0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

【详解】 积分区域如下图所示，在极坐标下，有



于是

$$I=\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a-r^2}}dr.$$

令 $r=2a\sin t$，于是

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}2a^2\left(1-\cos 2t\right)dt=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta$$

$$=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

五 、(本题满分 6 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出手同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1$， $p_3=12-2Q_2$，其中 p_1,p_2 分别表示该产品在两个市场的价格（单位：万元/顿），Q_1和Q_2 分别表示改产品在两个市场的销售量（即需求量，单位：顿），并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$

（1） 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

（2） 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上改产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种策略的总利润大小。

【详解】 (1) 根据题意,总利润函数为

$$L = R - C = p_1Q_1 + p_2Q_2 - (2Q+5)$$

$$= -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5.$$

令 $\begin{cases} L'_{Q_1} = -4Q_1 + 16 = 0 \\ L'_{Q_2} = -2Q_2 + 10 = 0 \end{cases}$,

解得 $Q_1 = 4, Q_2 = 5,$ 对应 $p_1 = 10$ (万元/吨), $p_2 = 7$ (万元/吨).

因驻点 $(4,5)$ 唯一,且实际问题一定存在最大值,故最大值必在驻点处达到,相应最大利润为

$L = -2\times 4^2 - 5^2 + 16\times 4 + 10\times 5 - 5 = 52$ (万元).

(2) 若实际价格无差别策略,则 $p_1 = p_2$,于是有约束条件

$$2Q_1 - Q_2 = 6.$$

构造拉格朗日函数

$$F(Q_1, Q_2, \lambda) = -2Q_1^2 - Q_2^2 + 16Q_1 + 10Q_2 - 5 + \lambda(2Q_1 - Q_2 - 6).$$

令 $\begin{cases} F'_{Q_1} = -4Q_1 + 16 + 2\lambda = 0 \\ F'_{Q_2} = -2Q_2 + 10 - \lambda = 0 \\ F'_{Q_3} = 2Q_1 - Q_2 - 6 = 0 \end{cases}$

解得 $Q_1 = 5, Q_2 = 4, \lambda = 2,$ 对应 $p_1 = p_2 = 8$.

最大利润 $L = -2\times 5^2 - 4^2 + 16\times 5 + 10\times 4 - 5 = 49$ (万元).

由上述结构可知,企业实行差别定价,所得利润总要大于统一价格的利润.

六、(本题满分 7 分)

求函数 $y = (x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

【详解】

因为 $y' = \dfrac{x^2 + x}{1+x^2} e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$;

令 $y' = 0,$ 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -1.$

列表讨论如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$

y'	+	0	$-$	0	+
y	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

由此可见,递增区间为 $(-\infty,-1),(0,+\infty)$;递减区间为 $(-1,0)$.

极小值为 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$; 极大值为 $f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$.

又因为 $a_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=e^{\pi},b_1=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-a_1x]=-2e^{\pi}$,

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=-2,$$

故所求渐近线为

$$y=a_1x+b_1=e^{\pi}(x-2),\text{以及 } y=a_2x+b_2=x-2.$$

七、(本题满分 6 分)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx,n=0,1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

【详解】 因为

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1,}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}I_n\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}.$$

考虑幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,其收敛区间为 $(-1,1)$,则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

于是 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|$,

令 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}I_n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}=S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(2+\sqrt{2}\right).$$

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$

试证明：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

【详解】 令 $F(x)=\int_0^{\pi} f(t)dt,$ 则有 $F(0)=F(\pi)=0.$ 又因为

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)$$

$$=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$$

$$=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx.$$

令 $G(x)=\int_0^{\pi}F(t)\sin tdt,$ 则 $G(0)=G(\pi)=0,$

于是由罗尔定理存在 $\xi\in(0,\pi),$ 使

$$G'(\xi)=F(\xi)\sin\xi=0.$$

因为当 $\xi\in(0,\pi),\sin\xi\neq 0,$ 所以有 $F(\xi)=0$.这样就证明了

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0.$$

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔中值定理知，至少存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi).$

使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,.$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

九、（本题满分 8 分）

设向量组 $\alpha_1=(a,0,10)^T$，$\alpha_2=(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T$，$\beta=(1,b,c)^T$，试问：当 a,b,c 满足什么条件时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一？

（2）β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

（3）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式。

【详解 1】 设有一组数 $x_1,x_2,x_3,$ 使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta,$$

即 $\begin{cases} ax_1-2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=b \\ 10x_1+5x_2+4x_3=c \end{cases}$

该方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}=-a-4.$$

(1) 当 $a\neq -4$ 时,行列式 $|A|\neq 0$,方程组有唯一解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,

且表示唯一.

(2) $a=-4$,对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3b-c-1 \end{bmatrix},$$

若 $3b-c\neq 1$, 则秩 $r(A)\neq$ 秩$r(\overline{A})$,方程组无解，β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

(3) $a=-4$ 且 $3b-c=1$, 时. 秩 $r(A)\neq$ 秩$r(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多解，β 可由

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表示不唯一.解方程组,得

$$x_1=C, x_2=-2C-b-1, x_3=2b+1 (C \text{ 为任何常数}).$$

因此有

$$\beta=C\alpha_1-(2C+b+1)\alpha_2+(2b+1)\alpha_3.$$

【详解 2】 设有一组数 x_1,x_2,x_3,使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta,$$

即

$$\begin{cases} ax_1-2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=b \\ 10x_1+5x_2+4x_3=c \end{cases}.$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & \vdots & 1-\frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & c-5b \end{bmatrix},$$

(1) 当 $-2-\frac{a}{2}\neq 0$,即 $a\neq -4$ 时，秩 $r(A)\neq$ 秩$r(\overline{A})=3$,方程组有唯一解，β 可由

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,且表示唯一.

(2) 当 $-2-\dfrac{a}{2}=0$,即 $a=-4$ 时, 对方程组的增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & \vdots & -b-1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1+2b\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1-3b+c\end{bmatrix}.$$

当 $3b-c\neq 1$, 则秩 $r(A)\neq$ 秩 $r(\overline{A})$,方程组无解, β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

(3) 同详解 1.

十、设有 n 元实二次型

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1+a_1x_2\right)^2+\left(x_2+a_2x_3\right)^2+\cdots+\left(x_{n-1}+a_{n-1}x_n\right)^2+\left(x_n+a_nx_1\right)^2,$$

其中 $a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 为实数，试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为正定二次型 .

【详解】 由题设条件可知，对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\geq 0$$

其中等号当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \cdots\cdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0.\end{cases}$$

同时成立.上述方程组仅有零解的充分必要条件是其系数行列式不为零，即

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+\left(-1\right)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0,$$

所以，当 $1+\left(-1\right)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时，对于任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)>0,$$

即当 $a_1a_2\cdots a_n\neq\left(-1\right)^{n+1}$ 时，此时二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为正定二次型 .

十一、(本题满分 8 分)

假设 05.50、1.25、0.80、2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值.已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$

（1） 求 X 的数学期望值 E(X)（记 E(X)为 b）；

（2） 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（3） 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

【详解】 （1）Y 的概率密度为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

于是有

$$b=E(X)=E\left(e^Y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^ye^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dt\underline{\underline{y-\mu=t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}e^{\mu+\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

（2） 当置信度$1-\alpha=0.95$时，标准正态分布对应于$\alpha=0.05$的双侧分位数等于 1.96。故$\overline{Y}\sim N\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$,可得参数$\mu$的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{Y}-1.96\times\frac{1}{4},\overline{Y}+1.96\times\frac{1}{4}\right)=\left(\overline{Y}-0.98,\overline{Y}+0.98\right)$$

其中$\overline{Y}$表示总体 Y 的样本均值，有

$$\overline{Y}=\frac{1}{4}\left(\ln 0.5+\ln 0.8+\ln 1.25+\ln 2\right)=\frac{1}{4}\ln 1=0,$$

将其代入上式，得μ的置信度为$(-0.98,0.98)$.

（4） 由指数函数e^x的严格单调递增性，知

$$P\{-0.98<\mu<0.98\}=P\left\{-0.48<\mu+\frac{1}{2}<0.48\right\}$$

$$=P\left\{e^{-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{1.48}\right\}=P\left\{e^{-0.48}<b<e^{1.48}\right\}=0.95$$

因此 b 的置信度为 0.95 的置信区间为$\left(e^{-0.48},e^{1.48}\right)$.

十二、（本题满分 8 分）

设 A,B 是二随机事件，随机变量

$X=\begin{cases}1 & 若A出现\\ -1 & 若A不出现\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1 & 若B出现\\ -1 & 若B不出现\end{cases}$

试证明随机变量X和Y不相关的充分必要条件是A和B相互独立.

【详解】 记$P(A)=p_1,P(B)=p_2,P(AB)=p_{12}$,由数学期望的定义,有

$$E(X)=P(A)-P(\overline{A})=2p_1-1,$$

$$E(Y)=P(B)-P(\overline{B})=2p_2-1,$$

进一步$E(XY)$.由于只有两个可能值1和-1,因此

$$P\{XY=1\}=P(AB)+P(\overline{AB})=2p_{12}-p_1-p_2+1,$$

$$P\{XY=-1\}=1-p\{XY=1\}=p_1+p_2-2p_{12},$$

于是 $E(XY)=P\{XY=1\}-P\{XY=-1\}$

$$=4p_{12}-2p_1-2p_2+1,$$

从而 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\bullet E(Y)=4p_{12}-4p_1p_2.$

可见 $Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow p_{12}=p_1p_2$, 即$P(AB)=P(A)P(B)$,也即X和Y不相关的充分必要条件是$A$和$B$相互独立.