

2011 年考研数学三真题

一 选择题

1. 已知当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  是等价无穷小, 则

- (A)  $k=1, c=4$
- (B)  $k=1, c=-4$
- (C)  $k=3, c=4$
- (D)  $k=3, c=-4$

2. 已知  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f(0)=0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

- (A)  $-2f'(0)$
- (B)  $-f'(0)$
- (C)  $f'(0)$
- (D)  $0$

3. 设  $\{u_n\}$  是数列, 则下列命题正确的是

- (A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛
- (B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛
- (C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛
- (D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

4. 设  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$ ,  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ , 则  $I, J, K$  的大小关系是

- (A)  $I < J < K$
- (B)  $I < K < J$
- (C)  $J < I < K$
- (D)  $K < J < I$

5. 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第二列加到第一列得矩阵  $B$ , 再交换  $B$  的第二行与第一行得单位矩阵. 记  $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A =$

$$P_1 P_2 \quad (B) \quad P_1^{-1} P_2$$

- (A)  $P_1 P_2$
- (B)  $P_1^{-1} P_2$

(C)  $P_2P_1$

(D)  $P_2^{-1}P_1$

6. 设  $A$  为  $4 \times 3$  矩阵,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  的 3 个线性无关的解,  $k_1, k_2$  为任意常数, 则  $Ax = \beta$  的通解为

(A)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$

(B)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1)$

(C)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$

(D)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1)$

7. 设  $F_1(x), F_2(x)$  为两个分布函数, 其相应的概率密度  $f_1(x), f_2(x)$  是连续函数, 则必为概率密度的是

(A)  $f_1(x)f_2(x)$

(B)  $2f_2(x)F_1(x)$

(C)  $f_1(x)F_2(x)$

(D)  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

8. 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 的泊松分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) 为来自总体的简单

随机样本, 则对应的统计量  $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$

(A)  $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

(B)  $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

(C)  $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

(D)  $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

## 二、填空题

(9) 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_

(10) 设函数  $z = (1 + \frac{x}{y})^y$ , 则  $dz \Big|_{(1,0)} =$  \_\_\_\_\_

(11) 曲线  $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$  在点  $(0,0)$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_

(12) 曲线  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , 直线  $x = 2$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积为 \_\_\_\_\_

(13) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$  的秩为 1,  $A$  中行元素之和为 3, 则  $f$  在正交变换下  $x = Qy$  的标准为 \_\_\_\_\_

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ , 则  $E(XY^2) =$  \_\_\_\_\_

### 三、解答题

15. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$

16. 已知函数  $f(u, v)$  具有连续的二阶偏导数,  $f(1, 1) = 2$  是  $f(u, v)$  的极值,

$z = f[(x+y), f(x, y)]$ . 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)}$

17. 求  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$

解:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx \\ & \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{\arcsin t + \ln t^2}{t} 2t dt = 2 \int (\arcsin t + \ln t^2) dt \\ & = 2 \left[ \int \arcsin t dt + \int \ln t^2 dt \right] \\ & = 2 \left[ t \arcsin t - \int t d \arcsin t + t \ln t^2 - \int t d \ln t^2 \right] \\ & = 2 \left[ t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + t \ln t^2 - \int 2t dt \right] \\ & = 2 \left[ t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + t \ln t^2 - 2t + C_1 \right] \\ & = 2 \left[ \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x} \ln x^2 - 2\sqrt{x} \right] + C \end{aligned}$$

18. 证明  $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$  恰有 2 实根.

19.  $f(x)$  在  $[0, 1]$  有连续的导数,  $f(0) = 1$ , 且  $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy$

$D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$ , 求  $f(x)$  的表达式.

20  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由  $\beta_1 = (1 \ a)^T, \beta_2 = ( \ \beta_2 )^T, \beta_3 = ( \ \ 1 )^T$  线性表出. ①求  $a$ ; ②将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出.

21、 $A$  为三阶实矩阵， $R(A) = 2$ ，且  $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求  $A$  的特征值与特征向量 (2) 求  $A$

22.

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$$P(X^2 = Y^2) = 1$$

求：(1)  $(X, Y)$  的分布；

(2)  $Z = XY$  的分布；

(3)  $\rho_{XY}$ .

23.  $(X, Y)$  在  $G$  上服从均匀分布， $G$  由  $x - y = 0, x + y = 2$  与  $y = 0$  围成。

① 求边缘密度  $f_X(x)$ ；② 求  $f_{X|Y}(x|y)$