1999 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

（1） 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos 2t \end{cases}$在点$(0,1)$处的法线方程为_____.

【答】 $y + 2x - 1 = 0$

【详解】 根据参数方程的求导公式，有

$$\frac{dy}{yx} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t},$$

与$x = 0, y = 0$对应$t = 0$，

故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{2}$，从而在点$(0,1)$处的法线的斜率为-2，法线方程为

$$y - 1 = -2(x - 0),$$

即 $$y + 2x - 1 = 0$$

（2）设函数$y = y(x)$由方程$\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$确定，则$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} =$_____.

【答】 1.

【详解】 方程两边同时对x求导，视y为x的函数，得

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x$$

由原方程知，$x = 0$时$y = 1$，代入上式，得

$$y'\Big|_{x=0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 1.$$

（3） $\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx =$_____.

【答】 $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$

【详解】

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} + \int \frac{8}{x^2 - 6x + 13}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C.$$

（4）函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上平均值为_____.

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$

【详解】 函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上平均值为

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\,\underline{\underline{x=\sin t}}\,\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$$

（5）微分方程 $y^{''}-4y^{'}=e^{2x}$ 得通解为_____.

【答】 $C_1e^{-2x}+\left(C_2+\dfrac{1}{4}x\right)e^{2x}.$

【详解】 特征方程为：

$$\lambda^2-4=0$$

解得 $$\lambda_1=2,\lambda_2=-2$$

故 $y^{''}-4y^{'}=0$ 的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$$

由于非齐次项为 $f\left(x\right)=e^{2x}$， $\lambda=2$ 为特征方程的单根，

因此原方程的特解可设为 $y^{*}=Axe^{2x}$，代入原方程，得

$$A=\frac{1}{4}$$

故所求通解为

$$y=y_1+y^{*}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$$

$$=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$$

二、选择题

（1）设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2g\left(x\right), x\le 0\end{cases}$ 其中 $g\left(x\right)$ 是有界函数，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处

（A）极限不存在.

（B）极限存在，但不连续

（C）连续，但不可导

（D）可导.

【 】

【答】 应选（D）

【详解】 因为

$$f^{'}\left(0+0\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f^{'}\left(0-0\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g\left(x\right)}{x}\lim_{x\to 0^-}g\left(x\right)x=0,$$

可见， $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处左、右导数相等，因此， $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，

故正确选项为(D).

（2）设 $\alpha\left(x\right)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt, \beta\left(x\right)=\int_0^{\sin x}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}dt$, 则当 $x\to 0$ 时， $\alpha\left(x\right)$ 是 $\beta\left(x\right)$ 的

（A）高阶无穷小；

（B）低阶无穷小；

（C）同阶但不等价的无穷小；

（D）等价无穷小.

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{\sin x}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}dt}=5\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{5}{e}\ne 1$$

故 $\alpha\left(x\right)$ 是 $\beta\left(x\right)$ 的同阶但不等价的无穷小.

因此正确选项为（C）.

（3）设 $f\left(x\right)$ 是连续函数， $F\left(x\right)$ 是其原函数，则

（A） 当 $f\left(x\right)$ 是奇函数时， $F\left(x\right)$ 必是偶函数.

（B） 当 $f\left(x\right)$ 是偶函数时， $F\left(x\right)$ 必是奇函数.

（C） 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

（D） 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

【 】

【答】 应选（A）

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$, 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C\underline{\underline{u=-t}}\int_0^x f(-u)d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^x f(u)du+C\\&=\int_0^x f(t)dt+C=F(x)\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

故（A）为正确选项.至于（B）、（C）、（D）可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数，可排除（B）；

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除（C）；

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty+\infty)$ 内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty+\infty)$ 内非单调增函数，可排除（D）.

（4）“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N, 当 $n\ge N$ 时, 恒有 $|x_n-\alpha|\le 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 α 的

（A）充分条件但非必要条件；

（B）必要条件但非充分条件；

（C）充分必要条件；

（D）既非充分条件又非必要条件；

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\alpha\Rightarrow$“对任意给定的 $\varepsilon_1\in(0,1)$，总存在正整数 N_1 当 $n\ge N_1$ 时，恒有 $|x_n-\alpha|\le\varepsilon_1$ ”，显然可推导处：“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N, 当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-\alpha|\le 2\varepsilon$ ”

反过来，若有“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N, 当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-\alpha|\le 2\varepsilon$ ”

则对任意的 $\varepsilon_1>0$（不访设 $0<\varepsilon_1<1$，当时，取一 $\widetilde{\varepsilon_1}, 0<\widetilde{\varepsilon_1}<1<\varepsilon_1$, 代替即可），取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\varepsilon_1>0$，存在正整数 N, 当 $n\geq N$ 时，恒有，令 $N_1=N-1$，则满足“对任意给定的 $\varepsilon_1\in(0,1)$，总存在正整数 N_1 当 $n\geq N_1$ 时，恒有 $|x_n-\alpha|\leq\varepsilon_1$

可见上述两种说法是等价的，因此正确选项为（C）

（5）记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

（A）1.　　　　（B）2　　　　（C）3.　　　　（D）4

【　】

【答】　应选（B）

【详解】　因为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 \\ 4x & -3 & x-7 \end{vmatrix}$$

$$=-x(x-7)$$

三、求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【详解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left[\ln(1+x)-x\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$$

四、计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx.$

【详解】 方法一：

$$\text{原式}=-\int_1^{+\infty}\arctan x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^b\right)+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln\left(+b^2\right)+\frac{1}{2}\ln 2\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

方法二：

作变换 $\arctan x=t$, 则

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}t\csc^2 tdt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot d\cot tdt$$

$$=-t\cdot\cot t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot tdt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\text{。}$$

五、求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\left(x>0\right)\\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解

【详解】 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 上述方程可化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2},$$

分离变量，得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$$

解得 $\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\ln x+C$

将$u=\dfrac{y}{x}$代回，得

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=\ln x+C$$

将$y\big|_{x=1}=0$代入，得$C=0,$

故初值问题得解为

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=\ln x$$

即
$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=x,$$

化简得

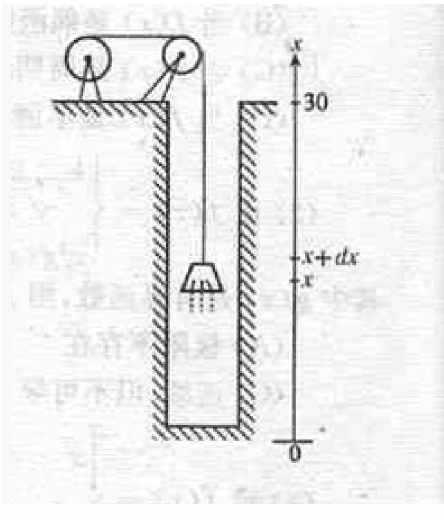
$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

六、为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深 30m,抓斗自重 400 N,缆绳每米重 500 N，抓斗抓起的污泥重 2000 N，提升速度为 3m/s,在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？（说明：①$1N\times 1m=1J$;m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度位于井口上方的缆绳长度忽略不计）

【详解 1】

建立坐标轴如图所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功

$$W=W_1+W_2+W_3$$



其中W_1是克服抓斗自重所作的功；W_2是克服缆绳重力作的功；W_3为提出污泥所作的功.由题意知

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x + dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = 50(30 - x)dx,$$

从而 $W_2 = \int_0^{30} 50(0 - x)dx = 22500.$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需作功为

$$dW_3 = 3(2000 - 20t)dt.$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\frac{30}{3} = 10$，所以

$$W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000.$$

因此，共需作功

$$W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500(J)$$

【详解 2】

作 x 轴如图所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功记为 W，当抓斗运动到 x 处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 $400\ N$, 缆绳的重力 $50(30 - x)(N)$，污泥的重力 $2000 - \frac{1}{3}x \cdot 20(N)$，即

$$f(x) = 400 + 50(30 - x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W = \int_0^{30}\left(3900 - \frac{170}{3}x\right)dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2\Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500(J)$$

七、已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1) 函数的增减区间及极值；

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点；

(3) 函数图形的渐进线.

【详解】所给函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

令 $y' = 0$，得驻点 $x = 0$ 及 $x = 3$.

$$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4},$$

令 $y''=0$，得 $x=0,$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+
y''	-	0	+	+	+	+
y	$\cap\nearrow$	拐点	$\cup\nearrow$	$\cup\searrow$	极小值	$\cup\nearrow$

由此可知：

（1）函数的单调增加区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$；单调减少区间为 $(1,3)$，

极小值为 $y\big|_{x=3}=\frac{27}{4}$

(2)函数图形在区间 $(-\infty,0)$ 内是（向上）凸的，

在区间 $(0,1)$，内是（向上）凹的，拐点为 $(0,0)$

（3）由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty,$ 知 $x=1$ 是函数图形的铅直渐进线；

由 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1,$

又 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-1)^2}-x\right]=2,$

故 $y=x+2$ 是函数图形的斜渐近线.

八、设函数 $y(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=0,$ 证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 $\xi,$ 使 $f'''(\xi)=3.$

【详解】方法一：

在 $x=0$ 处，将 $f(x)$ 按泰勒公式展开，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(x)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中η介于0与x之间，$x\in[-1,1]$

分别令$x=-1$和$x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),(-1<\eta_1<0),$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),(-1<\eta_2<1),$$

两式相减，得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$$

由$f'''(x)$的连续性，知$f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值和最小值，设它们分别为M,m，

则有

$$m\le\frac{1}{2}\left[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\right]\le M$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点$\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\right]=3$$

方法二：

令$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2(x+1)+(1+x)(1-x)f(0)$，则

$$\varphi(1)=f(1),\varphi(-1)=f(-1),\varphi(0)=f(0),\varphi'(0)=f'(0)$$

令$F(x)=f(x)-\varphi(x)$,

则$F(0)=F(1)=F(-1)=0$,

由罗尔定理，知$\exists\xi_1\in(-1,0),\xi_2\in(0,1)$使得$F''(\xi_1)=F''(\xi_2)=0.$

又$F'(0)=0$,由罗尔定理，

知　　$\exists\eta_1\in(\xi_1,0),\eta_2\in(0,\xi_2)$使$F''(\eta_1)=F''(\eta_2)=0.$

再由罗尔定理$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使$F'''(\xi)=0$,

而$F'''(x)=F'''(x)-\varphi'''(x)$，

而$\varphi'''(x)=3$,

所以　$F'''(\xi)=3$

九、设函数 $y(x)(x \ge 0)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0, y(0)=1,$ 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围程的三角形的面积记为 $S_1,$ 区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 $S_2,$ 并设 $2S_1-S_2,$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

【详解】 曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y(x)=y'(x)(X-x)$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$

由于 $y'(x)>0$， $y(0)=1,$

因此 $y(x)>0(x>0)$，于是有

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}$$

又 $$S_2=\int_0^x y(t)dt,$$

根据题设 $2S_1-S_2=1$ 有

$$\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)dt=1,$$

并且 $y'(0)=1.$ 上述两边对 x 求导并化简得

$$yy''=(y')^2$$

这是可降阶的二阶常微分方程，

令 $p=y'$，则上述方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2$$

分离变量，得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$$

解得 $$p=C_1y, \text{即} \frac{dy}{dx}=C_1y,$$

从而 $$y=e^{C_1x+C_2}$$

根据 $y(0)=1,\ y'(0)=1$. 得 $C_1=1, C_2=0,$

故所求曲线的方程为 $$y=e^x$$

十、设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx (n=1,2,\cdots,)$ 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【详解】 由题设可得

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1} f(x)dx\le f(k)(k=1,2,\cdots)$$

所以有

$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)dx\le 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调下降，

又 $$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left[f(k)-f(x)\right]dx+f(n)\ge 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界.

十一、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

【详解】 在已知矩阵等式两边同时左乘 A, 得

$$AA^*X=AA^{-1}+2AX,$$

利用公式 $AA^*=|A|E$，上式可化为

$$|A|X=E+2AX$$

即 $$\left(|A|E-2A\right)X=E,$$

从而 $$X=\left(|A|E-2A\right)^{-1}$$

由于 $$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$$

$$|A|E-2A=2\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}$$

故 $$X=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}$$

十二、 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4(-2,-6,10,p)^T$

（1）p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出；

（2）p 为何值时，该向量组线详相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

【详解】 由于行列式

$$\left|\left(\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3,\alpha_4\right)\right|=\begin{vmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{vmatrix}=2(2-p)$$

可见：

（1）当 $p\neq 2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.此时设

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$$

对矩阵 $\left(\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3,\alpha_4\vdots\alpha\right)$ 作初等行变换：

$$\left(\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3,\alpha_4,\vdots,\alpha\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 1 & -3 & 2 & -6\\ 1 & 5 & -1 & 10\\ 3 & 1 & p+2 & p\end{vmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 6 & -4 & 12 & \vdots & 2\\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & \vdots & -2\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & -7 & 0 & \vdots & -7\\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 1 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & \vdots & 1-p\end{bmatrix}$$

解得 ：

$$x_1=2,x_2=\frac{3p-4}{p-2},x_3=1,x_4=\frac{1-p}{p-2}$$

（2）当 $p=2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

此时向量组的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_{2,}\alpha_3$，（或 $\alpha_1,\alpha_{3,}\alpha_4$）为其一个极大性无关组.