2000 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx =$_____.

【答】 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \underline{\underline{x-1=\sin t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为_____.

【答】 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

【详解】 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，

则有

$$F'_x(1,-2,2)=2x\big|_{(1,-2,2)}=2,$$
$$F'_y(1,-2,2)=4y\big|_{(1,-2,2)}=-8,$$
$$F'_z(1,-2,2)=6z\big|_{(1,-2,2)}=12.$$

因此所求法线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$$

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_____.

【答】 $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$.

【详解】 令 $p=y'$，则原方程化为

$$p'+\frac{3}{x}p=0,$$

其通解为 $p=Cx^{-3}$.

因此，

$$y=\int Cx^{-3}dx=C_1-\frac{C}{2}x^{-2}=C_1+\frac{C_2}{x^2},\left(C_2=-\frac{C}{2}\right)$$

（4）已知方程组$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$无解，则$a=$_____.

【答】 -1.

【详解】 化增广矩阵为阶梯形，有

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 2 & 3 & a+2 & \vdots & 3\\ 1 & a & -2 & \vdots & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & a & \vdots & 1\\ 0 & a-2 & -3 & \vdots & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & a & \vdots & 1\\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & \vdots & a-3\end{bmatrix}$$

可见。当$a=-1$时，系数矩阵的秩为 2，而增广矩阵的秩为 3，因此方程组无解.

注意，当$a=3$时，系数矩阵和增光矩阵的秩均为 2，方程组有无穷多解.

(5)设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率为$\frac{1}{9}$, A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A)=$_____.

【答】 $\frac{2}{3}$.

【详解】 由题设。有

$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=\frac{1}{9},P\left(A\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)$$

因为A和B相互独立，所以A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B也相互独立。于是由$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}B\right)$，

有 $P(A)P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P(B)$

即有 $P(A)\left[1-P(B)\right]=\left[1-P(A)\right]P(B)$,

可得 $P(A)=P(B)$

从而 $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)=\left[1-P(A)\right]^2=\frac{1}{9}$,

解得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

二、选择题

（1）设$f(x),g(x)$是恒大于零得可导函数，且$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当$a<x<b$时，有

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x)$ （B） $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b)$ （D） $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

【 】

【答】　应选（A）.

【详解】　由题设知

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0,$$

因此当 $a < x < b$ 时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

即　　$f(x)g(b) > f(b)g(x)$，

可见（A）为正确选项.

（2）设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z \geq 0), S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有

（A）$\iint\limits_S xdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$　　（B）$\iint\limits_S ydS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$

（C）$\iint\limits_S zdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$　　（D）$\iint\limits_S xyzdS = 4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

【 】

【答】　应选（C）.

【详解】　显然，待选答案的四个右端均大于零，而 S 关于平面 $x=0$ 和 $y=0$ 对称，因此（A）、（B）、（D）三项中的左端项均能为零，可见（C）一定为正确选项.事实上,有

$$\iint\limits_S zdS = 4\iint\limits_{S_1} zdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$$

（3）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} u^2{}_n$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

【 】

【答】　应选（D）.

【详解】　利用级数的性质即知，（D）为正确选项，事实上，（A）、（B）、（C）三个选项可举反例说明是不正确的.例如：

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 收敛，但 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散，可排除（A）；

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u^2{}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，可排除（B）；

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，可排除（c）.

（4）设n维列向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\ (m<n)$线性无关，则$n$维列向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的充分必要条件为

（A） 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示.

（B） 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

（C） 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价.

（D） 矩阵$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价.

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 用排除法.

（A）为充分但非必要条件：若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示，则一定可推导$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关，因为若$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性相关，则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)<m$,于是$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$必线性相关，矛盾.但反过来不成立，如当$m=1$时，$\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,1)^T$均为单个非零向量是线性相关的，但$\alpha_1$并不能用$\beta_1$线性表示.

（B）为既非充分又非必要条件.如当$m=1$时，考虑$\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,1)^T$均线性无关，但$\beta_1$并不能由$\alpha_1$线性表示，必要性不成立；又如$\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,0)^T$，$\beta_1$可由$\alpha_1$线性表示，但$\beta_1$并不线性无关，充分性也不成立.

（C）为充分但非必要条件，若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价，由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关知，$r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$,因此$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关，充分性成立；当$m=1$时，考虑$\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,1)^T$均线性无关，但$\alpha_1$与$\beta_1$并不是等价的，必要性不成立.

（E） 故剩下（D）为正确选项.事实上，矩阵$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)\Leftrightarrow r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$,，因此是向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的充要条件.

（5）设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为

(A) $E(X)=E(Y)$.

(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$.

(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$.

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】 因为

$$\begin{aligned}Cov(\xi,\eta)&=Cov(X+Y,X-Y)\\&=Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)\\&=Cov(X,X)-Cov(Y,Y)\\&=D(X)-D(Y)\end{aligned}$$

可见

$$\begin{aligned}Cov(\xi,\eta)=0&\Leftrightarrow D(X)-D(Y)=0\\&\Leftrightarrow E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2\end{aligned}$$

故正确选项为（B）.

三、求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【详解】 因为

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

四、设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【详解】 根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

五、计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，取逆时针方向.

【详解】 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$,

则有 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial y},(x,y)\neq(0,0)$

作足够小的椭圆：$C:\begin{cases} x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t \\ y=\varepsilon\sin t \end{cases}$ （$t\in[0,2\pi], C$ 取逆时针方向），于是由格林公式有

$$\oint_{L+C}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0.$$

从而有

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\varepsilon^2}dt=\pi$$

六、设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S, 都有

$$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, 求 $f(x)$.

【详解】 由题设和高斯公式得

$$0=\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy$$

$$=\pm\iiint_\Omega\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dV,$$

其中 Ω 为 S 围成的有界闭区域，$\pm$ 号对应曲面取外侧或内侧，由 S 的任意性，知

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,(x>0)$$

即 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},(x>0)$$

这是一阶线性非齐次微分方程，其通解为

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\left(e^x+C\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}\right)=1,$

故必有 $$\lim_{x\to0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0,$$

即 $C+1=0$，从而 $C=-1$

因此 $$f(x)=\frac{e^x}{x}\left(e^x-1\right).$$

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区域，并讨论该区间断电处的收敛性.

【详解】 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[3^n+(-2)^n\right]n}{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right](n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 $R=3$，相应的收敛区间为 $(-3,3)$

当 $x=3$ 时，因为 $\frac{(3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数在点 $x=3$ 处发散；

当 $x=-3$ 时，由于 $\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 都收敛.

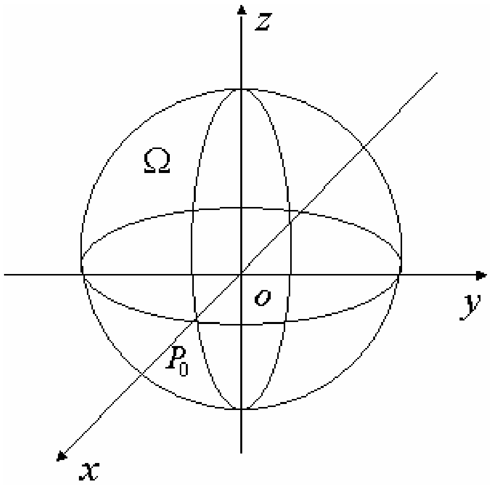
所以原级数在点 $x=-3$ 处收敛 .

八、设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置.

【分析】本题为一物理应用题，由于重心坐标是相对某一些坐标系而言的，因此本题的关键

是建立适当的坐标系，一般来说，可考虑选取球心或固定点 P_0 作为坐标原点，相应的有两种求解方法.

【详解 1】



用 Ω 表示球体，以 Ω 的球心为原点 O, 射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系，则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$ 球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

设 Ω 的重心位置为 $\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$，由对称性，得

$$\overline{y}=0,\overline{z}=0,$$

$$\overline{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\cdot k\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV}{\iiint\limits_{\Omega}k\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV}$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^3\right)dV+\iiint\limits_{\Omega}R^2dV=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr+\frac{4}{3}\pi R^5$$

$$=\frac{32}{15}\pi R^5$$

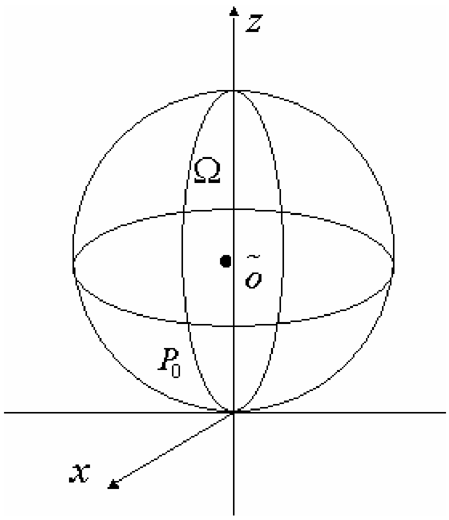
$$\iiint\limits_{\Omega}x\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2dV$$

$$=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^3\right)dV=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\overline{x}=-\dfrac{R}{4}$.

因此， 球体Ω的重心位置为$\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

【详解 2】



用Ω表示所考虑的球体，$\tilde{O}$表示球心，以点P_0选为原点，射线$P_0\tilde{O}$为正z轴建立直角坐标系，则球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

设Ω的重心位置为$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$，由对称性，得

$\bar{x}=0,\bar{y}=0,$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kz\left(x^2+y^2+z^3\right)dV}{\iiint\limits_{\Omega}k\left(x^2+y^2+z^3\right)dV}$$

因为

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi dr$$

$$=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R.$

因此，球体Ω的重心位置为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right).$

九、设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0,$试证：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【详解】 令$F(x)=\int_0^\pi f(t)dt,$则有$F(0)=F(\pi)=0,$又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)\\&=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx\\&=\int_0^\pi F(x)\sin xdx\end{aligned}$$

令$G(x)=\int_0^\pi F(x)\sin tdt$，则$G(0)=G(\pi)=0,$

于是存在$\xi\in(0,\pi)$，使$F(\xi)\sin\xi=0,$因为当$\xi\in(0,\pi)$，这样就证明了.

$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0$

再对$F(x)$在区间$[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理知，至少存在$\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$

使

$$F\ \ (\xi_1)=F^{'}(\xi_2)=0$$

即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$$

十、（本题满分 6 分）

设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$,且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$其中$E$为 4 阶单位矩阵，求矩阵$B.$

【分析】本题为解矩阵方程问题，相当于是未知矩阵，其一般原则是先简化，再计算，根据题设等式，可先右乘A，再左乘A^*，尽量不去计算A^{-1}.

【详解 1】

由$AA^*=A^*A=|A|E,$知$|A^*|=|A|^{n-1}$，因此有

$8=\left|A^*\right|=|A|^3$，

于是 $|A|=2$

在等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,两边先右乘 A，再左乘 A^*，得

$2B=A^*B+3A^*A=A^*B,$

$\left(2E-A^*\right)B=6E,$

于是

$$B=6\left(2E-A^*\right)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

【详解 2】

$|A|=2$（同解 1），由 $AA^*=A^*A=|A|E,$，得

$$A=|A|\left(A^*\right)^{-1}=2\left(A^*\right)^{-1}=2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&\frac{-3}{8}&0&\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{-3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

可见 $A-E$ 为逆矩阵.

于是由 $\left(A-E\right)BA^{-1}=3E,$ 有 $B=3\left(A-E\right)^{-1}A$，而

$$\left(A-E\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{bmatrix},$$

因此

$$B=3\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

十一、某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工得人数统计，然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及之间实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工.设第n年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为x_n和y_n，记为向量$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

（1） 求$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$;

（2） 验证$\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$是$A$的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

（3） 当$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$时，求$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

【详解】（1）由题意，得

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\end{cases}$$

化简
$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

可见 $$A=\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

（2）因为行列式

$$\left|\left(\eta_1,\eta_2\right)\right|=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

可见 η_1,η_2 线性无关.

又 $A\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\eta_1$, 故 η_1 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_1=1$.

$A\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2$, 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

（3）因为

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因此只要计算 A^n 即可.

令 $P=\eta_1,\eta_2=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

则由 $P^1AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$, 有 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$,

于是

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

十二、某流水生产线上每一个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$,各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为 X,求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

【详解】 记 $q=1-p$, X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,(k=1,2,\cdots)$$

X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'$$

$$=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'$$

$$=\frac{1}{p}$$

因为

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\left[q\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'\right]'$$

$$=p\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]'=\frac{2-p}{p^2}$$

故 X 的方差为

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{P^2}$$

$$=\frac{1-p}{p^2}$$

十三、设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x>\theta \\ 0, \quad x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

【详解】 似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

当 $x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，取对数，得

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$$

因为$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0,$所以$L(\theta)$单调增加.

由于θ必须满足$x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)$，因此当$\theta$取$x_1,x_2,\cdots,x_n,$中的最小值时，$L(\theta)$取最大值，所以$\vartheta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$